

## 56 生鏽圓規搞數學工藝…圓規的奧妙

世界末日之後的地球，人類的文明將嚴重退化。末日後的猿猴即使找到以前人類使用過的圓規，也是一把生了鏽的圓規。因為圓規生了鏽，所以猿猴有可能誤以為人類畫圖用的圓規之張角是固定不變的，也就是說，同一把圓規只能畫固定半徑的圓。在這樣的誤解之下，猿猴可能做出的點或圖形顯然少很多。最簡單的情形是正三角形可以作出來嗎？



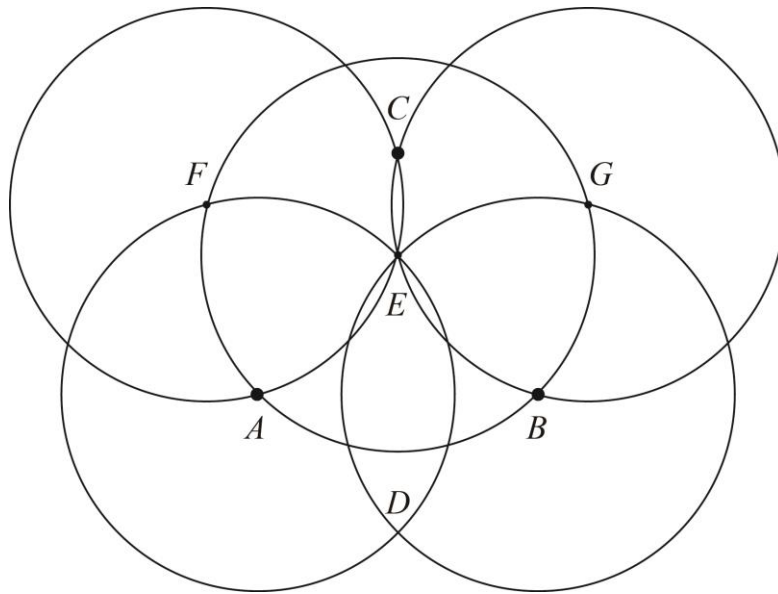
---

手上僅有一把生鏽的圓規，令其兩個尖點相距1單位，而紙上有兩個已知點A與B，他們相距小於2單位。在作圖過程只能用這把生鏽的圓規的要求下，作出紙上的一點C使得三角形ABC為正三角形。



作圖方法如下圖所示：

- ① 以  $A, B$  為圓心，分別作圓  $A$  與圓  $B$ （因為生鏽的圓規只能作固定半徑的圓，所以用圓心來稱呼所做出來的圓），並令  $D, E$  是這兩圓的兩個交點。
- ② 以  $E$  為圓心，作圓  $E$ ，並令圓  $E$  與圓  $A$  交於  $F, A$  兩點；與圓  $B$  交於  $G, B$  兩點。
- ③ 過  $F, G$  兩點分別作圓  $F$  及圓  $G$ ，並令此兩圓相交於  $E$  與  $C$  兩個點。
- ④  $C$  點為所求，即三角形  $ABC$  是正三角形。



證明過程：

- ① 觀察  $E, F, A$  三點得知三角形  $EFA$  為正三角形。因此  $\angle EFA = 60^\circ$ 。
- ② 考慮圓  $F$ ，由圓周角是圓心角的一半之性質，得到

$$\angle ECA = \frac{1}{2} \angle EFA = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

同理可得  $\angle ECB = 30^\circ$ 。

- ③  $\angle ACB = \angle ECA + \angle ECB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ 。
- ④ 從作圖的對稱關係可以發現三角形  $CAB$  是等腰三角形，即  $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$ 。
- ⑤ 三角形  $ABC$  為正三角形。

生鏽圓規作正三角形是美國幾何學家佩多所提出的問題，事實上，他還提出另一道生鏽圓規的作圖題：求作  $\overline{AB}$  線段的中點。這兩個問題都是中國的教授與學生首先得到解答。特別是第二題被一個未考上大學的學生做出，他是山西自學青年候曉榮。